BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a XII-a

1. Se consideră $a,b\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^4-4X^3+6X^2+aX+b$, care are rădăcinile complexe x_1,x_2,x_3,x_4.

a) Să se determine a şi b ştiind că f are rădăcina i.

b) Să se calculeze $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-1)^2$.

c) Să se se determine valorile reale ale numerelor a şi b ştiind că toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

Varianta 85, BAC

Barem:

a) $f(i)=b-5+i(a+4)=0$	1 p
Obţine $a=-4,b=5$	1 p
b) $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-1)^2=\sum_{k=1}^{4}x_k^2-2\sum_{k=1}^{4}x_k+4=$	1 p
$=\left(\sum_{k=1}^{4}x_k\right)^2-2\sum_{1\le k<j\le 4}x_kx_j-2\sum_{k=1}^{4}x_k+4=0$	1 p
c) $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}\Rightarrow(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-1)^2\ge 0$	1 p
Deduce din b) că $(x_1-1)^2=(x_2-1)^2=(x_3-1)^2=(x_4-1)^2=0$	1 p
Obţine $a=-4,b=1$	1 p

2. Să se calculeze $\int x\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x+\sin x)^3}dx,\ x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

Revista Sinus 1(25) / 2013

Barem:

$I=\int x\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x+\sin x)^3}dx=\int x\frac{(\cos x+\sin x)'}{(\cos x+\sin x)^3}dx=\int x\left(-\frac{1}{2(\cos x+\sin x)^2}\right)'dx=$	2 p
$-\frac{x}{2(\cos x+\sin x)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(\cos x+\sin x)^2}dx=$	2 p
$=-\frac{x}{2(\cos x+\sin x)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2 x(1+\operatorname{tg}x)^2}dx=$	1 p
$=-\frac{x}{2(\cos x+\sin x)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+\operatorname{tg}x)^2}\cdot(\operatorname{tg}x)'dx=$	1 p
$=-\frac{x}{2(\cos x+\sin x)^2}-\frac{1}{2(1+\operatorname{tg}x)}+\mathcal{C}$	1 p

3. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică egalitatea $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Să se arate că:

a) Există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(t)=a\cos t+b\sin t,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

b) Are loc inegalitatea $\int_0^{\pi/2}e^{f(t)}dt\ge\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Bogdan Victor Grigoriu, Fălticeni

Barem:

a) Obţine $f(t)+f(-t)=2a\cos t$, unde $a=f(0)$ (pentru $x=0$ şi $y=t$)	1 p
Obţine $f(\pi+t)+f(t)=0$ (pentru $x=\frac{\pi}{2}+t$ şi $y=\frac{\pi}{2}$)	1 p
Obţine $f(\pi+t)+f(-t)=-2b\sin t$, unde $b=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (pentru $x=\frac{\pi}{2}$ şi $y=\frac{\pi}{2}+t$)	1 p

Obține $f(t)=a\cos t+b\sin t$, cu $a=f(0), b=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (din relațiile anterioare)	1 p
b) Din inegalitatea $e^x \geq x+1, \forall x \geq 0$ și $f(t)\geq 0, \forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ deduce $e^{f(t)} \geq a\cos t+b\sin t+1, \forall t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	1 p
Prin integrare obține $\int_0^{\pi/2} e^{f(t)}dt \geq \frac{\pi}{2}+a+b$	1 p
Găsește $a+b=\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (pentru $t=\frac{\pi}{4}$) și finalizează	1 p

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.